Microeconomía

Producción

Leandro Zipitría

Departamento de Economía
Facultad de Ciencias Sociales - UdelaR

Maestría en Economía Internacional

Índice

Índice

Presentación

- Oferta de bienes y servicio realizada por unidades productivas: “empresas”
- Teoría sobre empresas activas y potenciales (inactivas)
- Empresas como “cajas negras”: tecnología que transforma insumos en productos
- No se analiza: propiedad, gerenciamiento, organización interna, financiamiento, etc.
- Entorno: precios dados
- Motivación: empresas maximizan beneficios

Previo: conjunto convexo

- Conjunto convexo: el promedio entre dos puntos del conjunto está **dentro** del conjunto

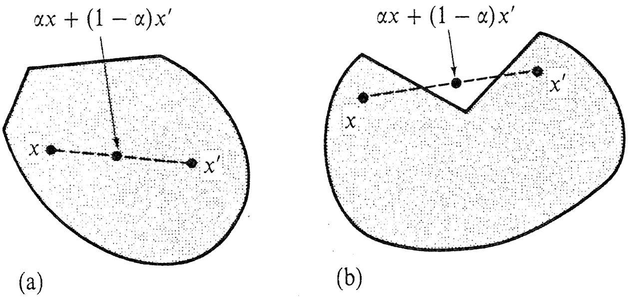
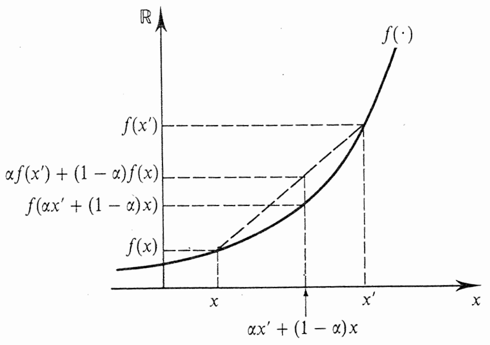


Figura: (a) Conjunto convexo; (b) Conjunto no convexo

Previo: función convexa

- Función (estrictamente) convexa: el promedio de dos puntos de la curva están **sobre** la curva. Formalmente:
  $f\left(\alpha x^{'} + (1-\alpha)x\right) \leq \alpha f\left(x^{'}\right) + (1-\alpha) f(x)$



Índice

Introducción

- L bienes
- **Vector de producción** (o plan de producción):
  $y = (y_1, ..., y_L) \in \mathbb{R}^L$
- Convención: valores positivos = productos; valores negativos = insumos
  - Ej.: $L = 5 \Rightarrow y = (-5, 2, -6, 3, 0)$
- **Conjunto de producción** $\left(Y \in \mathbb{R}^L\right)$: es el conjunto de todos los vectores de producción que son factibles (dato del modelo)
- **Función de transformación** $(F(.))$:
  $Y = \left\{Y \in \mathbb{R}^L : F(y) \leq 0\right\}$
- **Frontera de transformación**: $Y = \left\{Y \in \mathbb{R}^L : F(y) = 0\right\}$

Función de transformación con un producto

- **Función de producción**: $f(z)$ da el máximo nivel de producto q que se puede producir usando insumos $(z_1, ..., z_{L-1}) \geq 0$
- Si L el producto $\Rightarrow$ conjunto de producción $Y = \{(-z_1, ..., -z_{L-1}, q) : q - f(z_1, ..., z_{L-1}) \leq 0\}$

Propiedades conjuntos de producción

1. No vacío
2. Cerrado
3. No almuerzo gratis
4. Cierre es posible
5. Disposición gratis
6. Irreversibilidad
7. Retornos a escala
8. Aditividad (libre entrada)
9. Convexidad

Propiedades (I)

- **No vacío**: la empresa puede planear producir algo
- Y **es cerrado**: el conjunto de producción incluye la frontera
- **No hay almuerzo gratis**: no se puede producir sin insumos. ([Figura])
- **Cierre es posible**: $0 \in Y$
  - No se cumple si hay costos hundidos ([Figura]): i) compromiso de gasto mínimo asumido; ii) insumo de producción fijo
- **Disposición gratis**: se puede eliminar los insumos extra (o producción) sin costo; si $y \in Y$ y $y' \leq y \Rightarrow y' \in Y$
- **Irreversibilidad**: no se puede deshacer el proceso de producción; sea $y \in Y$ y $y \neq 0 \Rightarrow -y \notin Y$

No almuerzo gratis

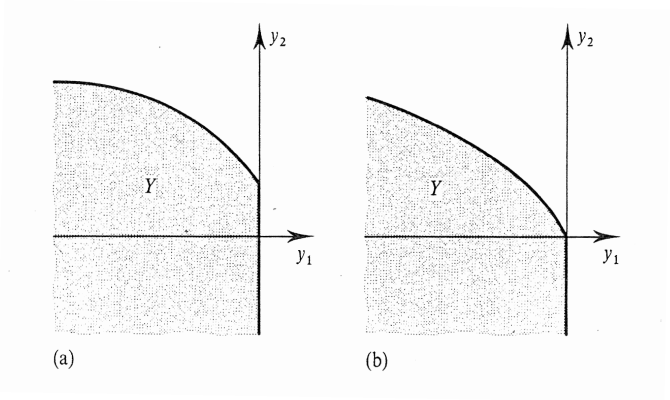


Figura: (a) Viola; (b) cumple no almuerzo gratis

Volver

Costos hundidos

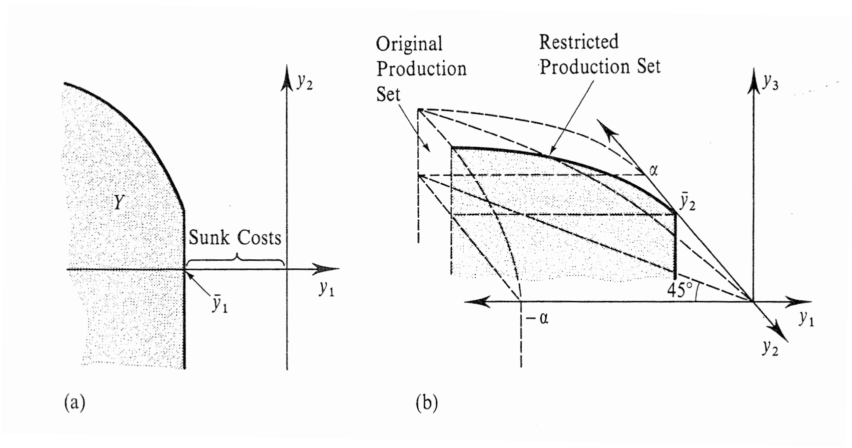


Figura: (a) Nivel mínimo de gasto comprometido; (b) un insumo fijo

Propiedades (I)

- **No vacío**: la empresa puede planear producir algo
- Y **es cerrado**: el conjunto de producción incluye la frontera
- **No hay almuerzo gratis**: no se puede producir sin insumos. ([Figura])
- **Cierre es posible**: $0 \in Y$
  - No se cumple si hay costos hundidos ([Figura]): i) compromiso de gasto mínimo asumido; ii) insumo de producción fijo
- **Disposición gratis**: se puede eliminar los insumos extra (o producción) sin costo; si $y \in Y$ y $y' \leq y \Rightarrow y' \in Y$
- **Irreversibilidad**: no se puede deshacer el proceso de producción; sea $y \in Y$ y $y \neq 0 \Rightarrow -y \notin Y$

Propiedades (II)

- **Retornos no crecientes a escala**: $\forall y \in Y \Rightarrow \alpha y \in Y$ $\forall \alpha \in [0, 1]$; los planes de producción pueden ser disminuidos ([Figura])
- **Retornos no decrecientes a escala**: $\forall y \in Y \Rightarrow \alpha y \in Y$ $\forall \alpha \geq 1$; los planes de producción pueden ser aumentados ([Figura])
- **Retornos constantes a escala**: $\forall y \in Y \Rightarrow \alpha y \in Y$ $\forall \alpha \geq 0$; Y es un cono (fig. 5.B.6).
- **Aditividad** (libre entrada): $y \in Y$ y $y^{'} \in Y \Rightarrow y + y^{'} \in Y$
  - implica que se puede separar la producción en distintas plantas
  - conjuntos de producción agregada deben satisfacer aditividad si hay libre entrada

Retornos no crecientes

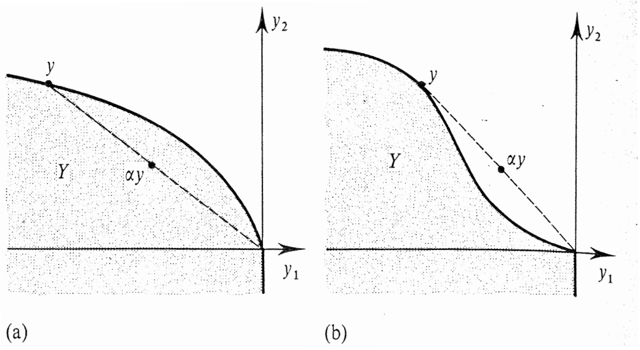


Figura: (a) Cumple; (b) no cumple retornos no crecientes a escala

◂ Volver

Retornos no decrecientes

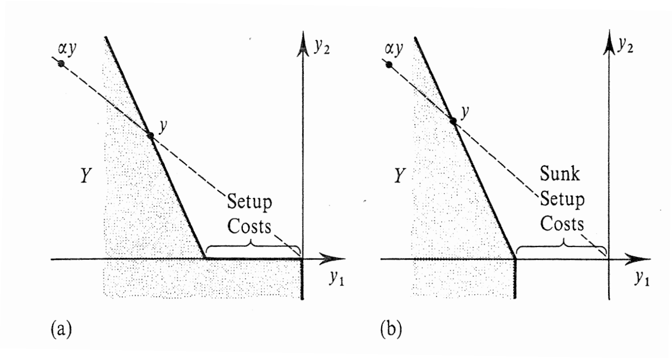


Figura: (a) Costo fijo; (b) Costo hundido $\Rightarrow$ retornos no decrecientes a escala

- Costos fijos o hundidos impiden disminuir la producción ◂ Volver

Propiedades (II)

- **Retornos no crecientes a escala**: $\forall y \in Y \Rightarrow \alpha y \in Y$ $\forall \alpha \in [0, 1]$; los planes de producción pueden ser disminuidos ([Figura])
- **Retornos no decrecientes a escala**: $\forall y \in Y \Rightarrow \alpha y \in Y$ $\forall \alpha \geq 1$; los planes de producción pueden ser aumentados ([Figura])
- **Retornos constantes a escala**: $\forall y \in Y \Rightarrow \alpha y \in Y$ $\forall \alpha \geq 0$; Y es un cono (fig. 5.B.6).
- **Aditividad** (libre entrada): $y \in Y$ y $y' \in Y \Rightarrow y + y' \in Y$
  - implica que se puede separar la producción en distintas plantas
  - conjuntos de producción agregada deben satisfacer aditividad si hay libre entrada

Ejercicio

- Ejercicio 5.B.2: Sea $f(.)$ es una función de producción asociada a una tecnología que produce un único producto, y Y el conjunto de producción de esta tecnología. Demostrar que Y tiene rendimientos constantes a escala $\iff$ $f(.)$ es homogénea de grado 1.

Propiedades (III)

- **Convexidad**: supuesto importante Y es convexo; si $y, y^{'} \in Y$ y $\alpha \in [0,1] \Rightarrow \alpha y + (1-\alpha) y^{'} \in Y$
  - si no se cumple $\Rightarrow$ existen indivisibilidades en la producción
  - si retornos no crecientes $\Rightarrow$ Y convexo; en caso contrario, Y no convexo
  - convexidad $\Rightarrow$ combinaciones de producto "no balanceadas" no son menos costosas que las balanceadas
- **Cono convexo**: Y es un cono convexo si $\forall y, y^{'} \in Y$ y constantes $\alpha, \beta \geq 0$ se tiene que $\alpha y + \beta y^{'} \in Y$.
  - es la conjunción de la convexidad y los retornos constantes a escala

Índice

Introducción

- Empresas maximizan beneficios
- Precios: $p = (p_1, ..., p_L) \gg 0$
- Precios independientes de plan de producción (empresas tomadoras de precio)
- Y satisface:
  - no vacío
  - cerrado (incluye frontera)
  - disposición gratis (se puede eliminar insumos extra)

Índice

Definiciones (I)

- Dado $p \gg 0$, p vector de L precios (insumos + productos)
- $y \in \mathbb{R}^L \Rightarrow$ beneficios $p.y$
- Maximización de beneficios

$$\begin{aligned} \underset{y}{Max} \quad & p.y \\ s.a \quad & y \in Y \end{aligned}$$

o usando $F(.)$ para describir Y

$$\begin{aligned} \underset{y}{Max} \quad & p.y \\ s.a \quad & F(y) \leq 0 \end{aligned}$$

Definiciones (II)

- **Función de beneficios**: $\pi(p)$ asocia a cada p el valor
  $\pi(p) = Max\{p.y : y \in Y\}$
- **Correspondencia de oferta**: $y(p)$ es el conjunto de los vectores que maximizan beneficios
  $y(p) = Max\{y \in Y : p.y = \pi(p)\}$
  - conjunto, más que vector
  - puede no existir, ej. si $\pi(p) = +\infty$
- Ejercicio 5.C.1 de la lista de ejercicios.

Maximización: varios bienes

- CPO: si $y^* \in y(p) \Rightarrow$ para algún $\lambda \geq 0$, y^* cumple $p_l = \lambda \frac{\partial F(y^*)}{\partial y_l}$ para $l = 1, ..., L$ o

$$p = \lambda \nabla F(y^*)$$

  - vector de precio y gradiente son proporcionales
  - implica que: $p_l / p_k = MRT_{lk}(y^*) \; \forall l, k$
- Si Y es convexo $\Rightarrow$ las CPO son condiciones necesarias y además suficientes al problema de maximización

Maximización: un bien

- Empresa produce un bien: p precio producto; w precio insumos, dados
- Problema $\underset{z \geq 0}{Max}\ pf(z) - w.z$
- CPO: si z^* óptimo $\Rightarrow$ se cumple $p\frac{\partial f(z^*)}{\partial z_l} \leq w_l$, con igualdad si $z_l^* > 0$ para $l = 1, ..., L-1$ o

$$p\nabla f(z^*) \leq w$$

  - el valor producto marginal de cada insumo l utilizado tiene que ser igual a su precio

Propiedades

Teorema

Sea $\pi(.)$ la función de beneficios del conjunto de producción Y, y sea $y(.)$ la correspondencia de oferta asociada. Y es cerrado y satisface la disposición gratis. Entonces, se cumple:

1. $\pi(.)$ *es HG1 en* p *(beneficios reales constantes)*
2. $\pi(.)$ *es convexa en* p *(beneficios pueden -a veces- crecer a tasa creciente)*
3. *Si* Y *es convexo* $\Rightarrow Y = \{y \in \mathbb{R}^L : p.y \leq \pi(p), \forall p \gg 0\}$
4. $y(.)$ *es HG0 (decisiones reales separadas de nivel de precios)*
5. *Lema de Hotelling: si* $y(\overline{p})$ *consiste de un único punto* $\Rightarrow \pi(.)$ *es diferenciable en* $\overline{p}$ *y* $\nabla\pi(\overline{p}) = y(\overline{p})$

- *Demostraciones: en clase*

Ley de oferta

- Las cantidades responden en la misma dirección que los cambios de precio
  - si sube el precio de un producto, aumenta la cantidad
  - si sube el precio de un insumo, disminuye la cantidad
- Ley de oferta: $\left(p-p^{'}\right)\left(y-y^{'}\right)\geq 0$
- $\left(p-p^{'}\right)\left(y-y^{'}\right)=\left(p.y-py^{'}\right)+\left(p^{'}.y^{'}-p^{'}.y\right)\geq 0$, dado que $y\in y\left(p\right)$ y $y^{'}\in y\left(p^{'}\right)$

Índice

Presentación

- Si empresa maximiza beneficios $\Rightarrow$ minimiza costos
- Maximización de beneficios

$$\underset{z \geq 0}{Mix} \quad w.z$$
$$s.a \quad f(z) \geq q$$

- **Función de costos**: $c(w, q)$
- **Correspondencia de demanda de factores**: $z(w, q)$

Maximización: varios bienes

- CPO: si z^* óptimo y $f(.)$ diferenciable $\Rightarrow w_l \geq \lambda \frac{\partial f(z^*)}{\partial f z_l}$, con igualdad si $z_l^* > 0$ para $l = 1, ..., L-1$ o

$$w \geq \lambda \nabla f(z^*)$$

  - vector de precio de insumos y gradiente son proporcionales
  - implica que: $w_l / w_k = MRTS_{lk}(z^*)\ \forall l, k$
  - λ mide el costo de relajar la restricción $f(z) \geq q$; es decir $\lambda = CMg = \partial c(w, q) / \partial q$
- Si Y es convexo $\Rightarrow$ las CPO son condiciones necesarias y además suficientes al problema de maximización

Propiedades

Teorema

Sea $c(w, q)$ función de costos de Y, y sea $f(.)$ y $z(w, q)$ las funciones asociadas. Entonces, se cumple:

1. *$c(\cdot)$ es HG1 y cóncava en w, y no decreciente en q (¿intuición?)*
2. *$z(\cdot)$ es HG0 en w (¿intuición?)*
3. *(Lema de Shepard): Si $z(\bar{w}, q)$ consiste en un único punto $\Rightarrow$ se cumple que $\partial c(\bar{w}, q) / \partial w = z(\bar{w}, q)$*
4. *Si $f(z)$ es cóncava $\Rightarrow$ $c(\cdot)$ es una función convexa en q (CMg son no decrecientes en q)*

- Demostraciones: deberes.

Índice

Tecnologías convexas (I)

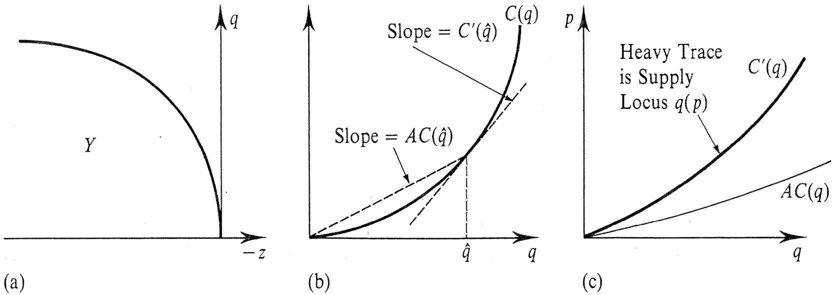


Figura: Rendimientos estrictamente decrecientes a escala

- Tecnología y costo convexas

Tecnologías convexas (II)

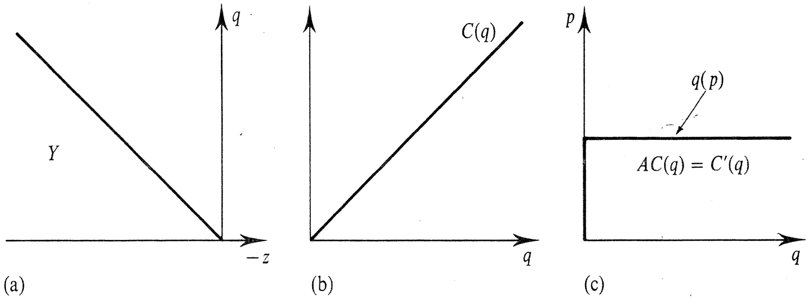


Figura: Rendimientos constantes a escala

- Tecnología y costo convexas

Tecnología convexa (III)

- Costos hundidos $\Rightarrow$ tecnología es convexa

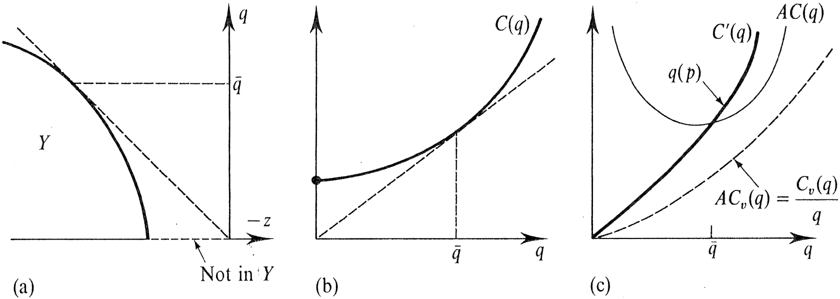


Figura: Convexidad: costos hundidos y costos variables convexos

- Tecnología y costos convexa!

Tecnología no convexa (I)

- CPO no implican que q maximice beneficios

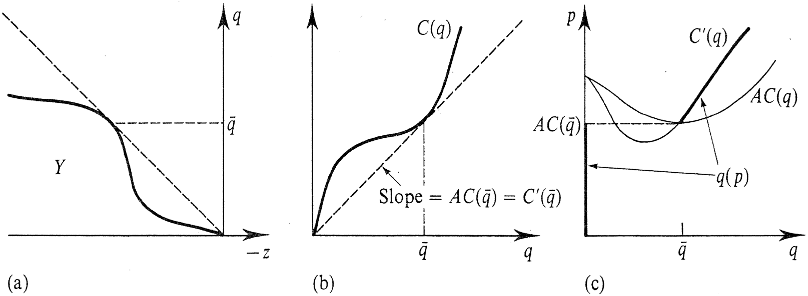


Figura: No convexidad: indivisibilidades

- Tecnología y costos no convexas

Tecnología no convexa (II)

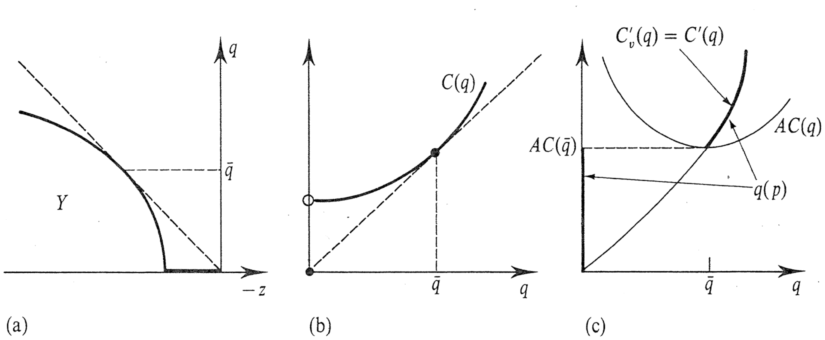


Figura: No convexidad: costos fijos y costos variables convexos

- Tecnología y costos no convexa

Tecnología no convexa (III)

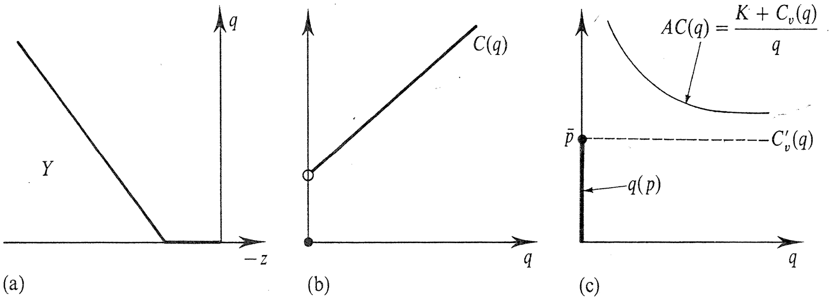


Figura: No convexidad: costos fijos y retornos constantes

- Tecnología y costos no convexa

Índice

Presentación

- Diferente a consumidor:
  - sólo efectos sustitución (tecnológica)
  - no hay efecto riqueza porque no hay restricción presupuestal
- J unidades de producción en la economía, con conjuntos de producción $Y_1, \ldots, Y_J$
- Cada Y_j es no vacío, cerrado y satisface libre disposición
- Función beneficios: $\pi_j(p)$; oferta: $y_j(p)$
- Oferta agregada

$$y(p) = \sum_{j=1}^{J} y_j(p) = \left\{ y \in \mathbb{R}^L : y = \sum_j y_j \text{ para algún } y_j \in y_j(p), \right.$$

$$\left. j = 1, \ldots, J \right\}$$

Proposición

Teorema

Para todo $p \gg 0$, *tenemos*

1. $\pi^*(p) = \sum_i \pi_j(p)$
2. $y^*(p) = \sum_j y_j(p) \left(= \left\{ \sum_j y_j : y_i \in y_i(p)\, \forall j \right\} \right)$

Demostración.

Libro MC-W-G página 148. $\square$

Intuición

El beneficio agregado que se obtiene de la maximización de beneficios individuales -dados los precios- es el mismo que se obtendría si las empresas coordinaran su producción conjunta

¿Qué implica?

1. La asignación de q entre las empresas minimiza los costos
2. El costo total de producción $=$ suma de costos agregados
3. El análisis hecho para una empresa es idéntico para J empresas

MC-W-G

En resumen: cuando la empresa maximiza beneficios dados los precios, el lado de la producción de la economía se agrega en forma bonita

Índice

Introducción

Definición

Un vector de producción $y \in Y$ es eficiente si no hay otro vector $y^{'} \in Y$ tal que $y^{'} \geq y$ y $y^{'} \neq y$

- Un vector de producción es eficiente si no hay otro factible que genere tanto producto como y sin utilizar insumos adicionales, y que pueda producir más de algunos productos o utilice menos de algunos insumos
- Todo vector y eficiente $\Rightarrow$ tiene que estar en la frontera de Y ($\not\Leftarrow$)

Teoremas (I)

Teorema

(Versión Primer teorema del Bienestar) Si $y \in Y$ maximiza beneficios para algún $p \gg 0 \Rightarrow$ es eficiente

Demostración.

Deberes, $\square$

- Se cumple independientemente de la convexidad del conjunto Y
- Si se suma Agregación $\Rightarrow$ si un conjunto de empresas maximiza beneficios de forma independiente respecto al -mismo- vector de precios $p \Rightarrow$ la producción agregada es socialmente eficiente

Teoremas (II)

Teorema

Si Y es convexo $\Rightarrow$ todo vector $y \in Y$ es un vector de producción que maximiza beneficios para algún vector de precio $p \geq 0$.

Demostración.

Libro MC-W-G página 151. $\square$

- Versión "Segundo teorema del bienestar": puedo alcanzar cualquier vector de producción factible en forma eficiente ajustando p