



## Objetivos

1. Definir juegos bayesianos
2. Presentar el equilibrio de Nash bayesiano
3. Dar ejemplos de juegos bayesianos
4. Presentar el principio de revelación

# ATENCIÓN

- Esta etapa del curso contiene material que tienen como objetivo ilustrar (y ¿dramatizar?) hechos de la realidad con el objetivo de explicar los conceptos.
- NO representan mi opinión personal ni pretenden juzgar sobre estas situaciones.

# Índice

Juegos bayesianos (🤔)

Ejemplos (😍)

Una variante de BoT

Entrada al mercado (+ complicado)

El amigo del fiscal (un poco + complicado...)

Principio de revelación (😞)

## Presentación

- Los **juegos bayesianos** son juegos estrategicos que permiten analizar situaciones donde cada jugador tiene **información incompleta** sobre algún aspecto de su entorno que es relevante para elegir una acción.
- Información **incompleta**: al menos un jugador no está seguro de la función de utilidad de otro jugador, es decir **algún jugador tiene información privada**.

## Ejemplos “motivadores”

### 1. Desarrollo

- Política de apoyo empresarial  $\implies$  las empresas ¿son emprendedoras o rentistas?
- Con el tratado transpacífico  $\implies$  ¿Uruguay crece o se estanca?

### 2. Ciencia política

- Milei, ¿es o se hace?
- Mujica, ¿se va a la chacra si gana Orsi o se queda?

### 3. La vida misma

- El profe, ¿es simpático o tenaza?
- Bielsa, ¿es un genio o un loco?





## Harsanyi

- Harsanyi (1967)  $\Rightarrow$  con 1. y 2. se transforma un juego con información *incompleta* en un juego con información *imperfecta*.
- En alguna ronda del juego el jugador que tiene que decidir no sabe la historia completa del juego, en particular que jugó “el azar” o “la naturaleza”.

### Problema

se supone que la distribución de probabilidades sobre los tipos es de conocimiento común.



## Bernoulli

- Cuando el juego es de información completa, la utilidad que obtengo en cada resultado es simplemente el pago.
- Cuando el juego es de información incompleta, tengo que tomar una decisión **sin saber el tipo**  $\implies$  el bienestar —utilidad— del agente es **esperado**.
- Ej: supongamos que tiro una moneda: si sale cara me dan \$100, si sale cruz me dan \$0; antes de tirar la moneda, ¿cuánto espero ganar en el juego?
- Fácil:  $100 \times 0,5 + 0 \times 0,5 = \$50$ .
- Esta es la **utilidad esperada**. (Gracias Bernoulli 🤓)

# Estrategia

## Definición

En un juego bayesiano una **estrategia** para el jugador  $i$  es una función —regla—  $s_i(t_i)$  donde, **para cada tipo del jugador** determina la **acción** que el tipo  $t_i$  elegiría si el azar determinaría que es de ese tipo.

- En un juego bayesiano, los espacios de **estrategias** se construyen a partir de los espacios de **tipos y acciones** (ejemplo de estrategia: soy Milei, si soy loco, bajo el gasto a la mitad; si soy racional, me reparto la plata con los sindicalistas).
- $S_i$  el conjunto de las posibles estrategias del jugador  $i$  (esto en un rato, hay que tener cuidado).



## EBN

- Un **equilibrio bayesiano de Nash** (EBN) es un equilibrio de Nash en un juego bayesiano

### Definición

en el juego bayesiano estático las estrategias  $s^* = (s_i^*, s_{-i}^*)$  forman un **EBN** si: para cada jugador  $i$  + para cada uno de sus tipo  $t_i$  + para cada acción  $a_i$ :

$\implies s_i^*(t_i)$  es tal que, dados sus tipos y sus creencias sobre las estrategias de los demás jugadores ( $s_{-i}^*$ ), su utilidad esperada es al menos tan grande como ante cualquier acción alternativa  $a_i \in A_i$ .

## EBN (explicación)

- Cada tipo del jugador  $i$  es como un jugador diferente que maximiza su utilidad, dada su distribución de probabilidad condicional sobre las elecciones de estrategias de sus rivales.
- En un EBN cada jugador elige la estrategia  $s_i^*(\cdot)$  de forma que, para cualquiera de sus tipos  $t_i \in T_i$  y sus creencias sobre los otros jugadores  $p_i(t_{-i}|t_i)$ , su pago esperado por jugar esa estrategia es al menos tan grande a cualquier alternativa  $s_i'(\cdot)$ .
- Implica una elección para todo tipo del jugador  $i$ , **aún cuando él sepa que tipo es** ( $i$  recuerdan?).
- Ello porque, aún cuando él sabe, **los demás jugadores no**. (Y qué importante que es esto!)

## Conjunto de información

### Definición

el **conjunto de información** de un jugador es una colección de nodos que satisface:

1. al jugador le corresponde jugar en cada nodo del conjunto de información y
2. cuando se llega a un nodo del conjunto de información, el jugador que tiene que decidir, no sabe a qué nodo dentro del conjunto de información se ha (o no) llegado

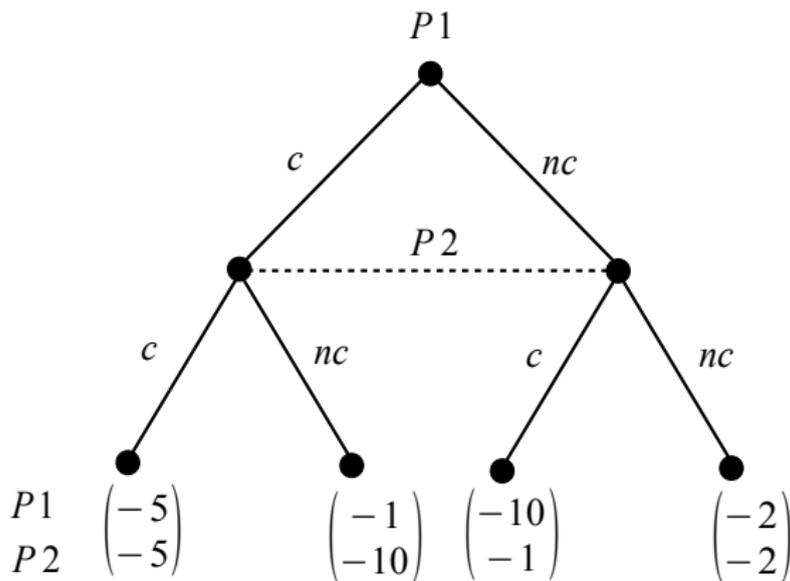
⇒ en un conjunto de información el jugador debe tener el mismo conjunto de acciones factibles en cada nodo de decisión

## Ej. dilema del prisionero: forma normal

- Dos prisioneros ( $I = 1, 2$ ), dos acciones posibles ( $c$  – *confesar*;  $nc$  – *no confesar*)

		Prisionero 2	
		$c$	$nc$
Prisionero 1	$c$	-5, -5	-1, -10
	$nc$	-10, -1	-2, -2

## Ej. dilema del prisionero: forma extensiva



# Índice

Juegos bayesianos (🤔)

Ejemplos (😍)

Una variante de BoT

Entrada al mercado (+ complicado)

El amigo del fiscal (un poco + complicado...)

Principio de revelación (😞)

# Índice

Juegos bayesianos (🤔)

Ejemplos (😍)

Una variante de BoT

Entrada al mercado (+ complicado)

El amigo del fiscal (un poco + complicado...)

Principio de revelación (😞)

## Presentación

- Versión modificada del “Bachata o Trap” (que puede ser Meshuggah o Lorna Shore, para alegría del Profe 🙌).
- “Bachata o Trap”: dos personas quieren salir juntas a un concierto y las opciones son .... bachata o trap.
- Una (Jugadora 1) prefiere la bachata, la otra (Jugador 2) el trap, pero ambas prefieren pasar la noche juntas.
- Este juego se conoce también como “Batalla de los sexos”, aunque el conflicto que representa es más uno entre individuos en general.

## Presentación

- Versión modificada del “Bachata o Trap” (que puede ser Meshuggah o Lorna Shore, para alegría del Profe 🙌).
- “Bachata o Trap”: dos personas quieren salir juntas a un concierto y las opciones son .... bachata o trap.
- Una (Jugadora 1) prefiere la bachata, la otra (Jugador 2) el trap, pero ambas prefieren pasar la noche juntas.
- Este juego se conoce también como “Batalla de los sexos”, aunque el conflicto que representa es más uno entre individuos en general.



# Pagos

		Jugador 2	
		B	T
Jugador 1	B	2, 1	0, 0
	T	0, 0	1, 2

- ¿Cuántos equilibrios de Nash hay en este juego? 2:  $\{BB, TT\}$ .



## Representación

		J. 2	
		B	T
J. 1	B	2, 1	0, 0
	T	0, 0	1, 2
Quiere conocer 1/2			

		J. 2	
		B	T
J. 1	B	2, 0	0, 2
	T	0, 1	1, 0
No quiere 1/2			







## Previo: estrategias

- ¿Qué estrategias tiene la jugadora 1? Jugar B o T.
- ¿Qué estrategia tiene el jugador 2? Jugar  $\{BB, BT, TT, TB\}$ .
- Y ahora, con ustedes, el señor Miyagi.

# El señor Miyagi







## Solución: EBN

- Si la jugadora 1 juega  $B$ , entonces el jugador 2 juega  $BT$ ; si el jugador 2 juega  $BT$ , la jugadora 1 juega  $B$ .
- El  $EBN = \{B, BT\}$ , la jugadora 1 propone bachata, y el jugador 2 propone bachata si quiere conocerla y trap si no quiere conocerla.
- ... razonable !

Para este juego

el EBN parece suficiente.

## Solución: EBN

- Si la jugadora 1 juega  $B$ , entonces el jugador 2 juega  $BT$ ; si el jugador 2 juega  $BT$ , la jugadora 1 juega  $B$ .
- El  $EBN = \{B, BT\}$ , la jugadora 1 propone bachata, y el jugador 2 propone bachata si quiere conocerla y trap si no quiere conocerla.
- ... razonable !

Para este juego

el EBN parece suficiente.

# Índice

Juegos bayesianos (🤔)

Ejemplos (😍)

Una variante de BoT

**Entrada al mercado (+ complicado)**

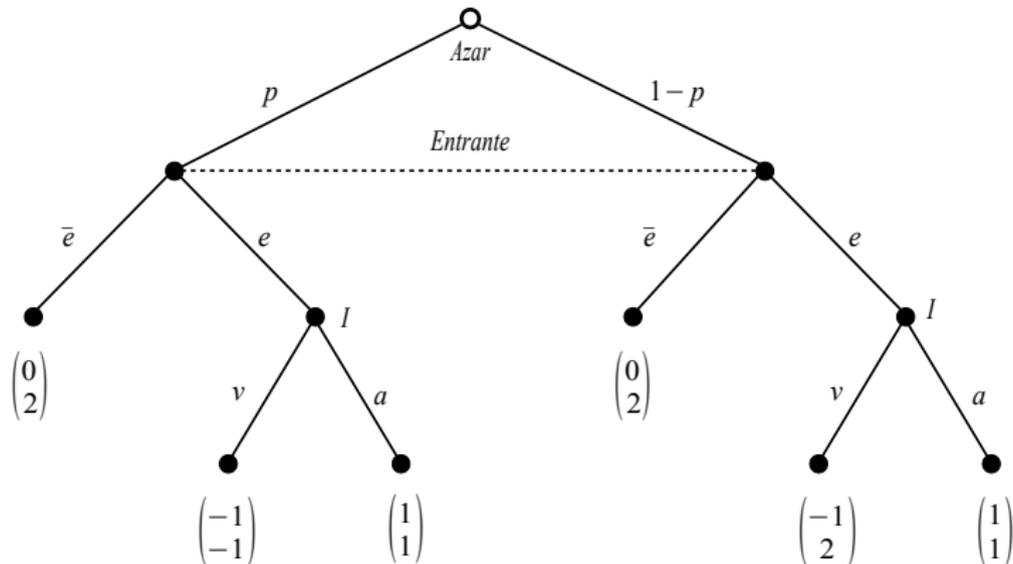
El amigo del fiscal (un poco + complicado...)

Principio de revelación (😞)

## Presentación

- Sea un juego de entrada al mercado con información incompleta.
- El entrante  $E$  no conoce el tipo del instalado  $I$ .
- $I$  puede ser “racional” y preferir no pelear la entrada.
- $I$  puede ser “loco” y disfrutar haciendo la guerra a sus rivales.
- $P(I = \text{“racional”}) = p$ ;  $P(I = \text{“loco”}) = 1 - p$ .
- $E$  elige entrar  $e$  o no entrar  $\bar{e}$ .
- $I$  elige jugar *pelear*  $v$  o *acomodarse* a la entrada  $a$ .

Figura: Entrada al mercado con información incompleta.



## Estrategias

- Cada línea punteada representa un conjunto de información.
- El instalado conoce su tipo y tiene dos nodos de decisión.
- $E_I = \{aa, av, va, vv\}$ .
- El entrante no conoce el tipo, solo las probabilidades.
- $E_E = \{e, \bar{e}\}$ .
- Podemos representar el juego en forma normal.
- A diferencia de los juegos con información completa, cada resultado será estocástico *ex ante*.









## Soluciones

- Existen **4 EBN**:  $EBN = \{\bar{e}, av; p < 1/2\}$ ;  
 $EBN = \{e, av; p > 1/2\}$ ;  $EBN = \{\bar{e}, va; p > 1/2\}$ ;  
 $EBN = \{\bar{e}vv; \forall p\}$ ;

- De otra forma:

$$\bullet s_I(t_i) = \begin{cases} a & \text{si } t_I = \text{racional} \\ v & \text{si } t_I = \text{loco} \end{cases}; s_E = \begin{cases} e & \text{si } p > 1/2 \\ \bar{e} & \text{si } p < 1/2 \end{cases}$$

$$\bullet s_I(t_i) = \begin{cases} v & \text{si } t_I = \text{racional} \\ a & \text{si } t_I = \text{loco} \end{cases}; s_E = \bar{e} \text{ si } p > 1/2$$

$$\bullet s_I(t_i) = \begin{cases} v & \text{si } t_I = \text{racional} \\ v & \text{si } t_I = \text{loco} \end{cases} \quad (\text{estrategia de pooling});$$

$$s_E = \bar{e} \forall p$$

## Demasiados equilibrios...

- 4 EBN parecen muchos, además algunos no son razonables!
- Pregunta, ¿podemos usar algún refinamiento? ¡Sí! ¿Que tal algún ENPSj?.
- Volvamos a la figura, ¿podemos usar inducción hacia atrás?, ¿hay subjuegos en el juego?, si hay, ¿cuántos?

## Demasiados equilibrios...

- 4 EBN parecen muchos, además algunos no son razonables!
- Pregunta, ¿podemos usar algún refinamiento? ¡Sí! ¿Que tal algún ENPSj?.
- Volvamos a la figura, ¿podemos usar inducción hacia atrás?, ¿hay subjuegos en el juego?, si hay, ¿cuántos?

## Demasiados equilibrios...

- 4 EBN parecen muchos, además algunos no son razonables!
- Pregunta, ¿podemos usar algún refinamiento? ¡Sí! ¿Que tal algún ENPSj?.
- Volvamos a la figura, ¿podemos usar inducción hacia atrás?, ¿hay subjuegos en el juego?, si hay, ¿cuántos?

Figura: ENPSJ

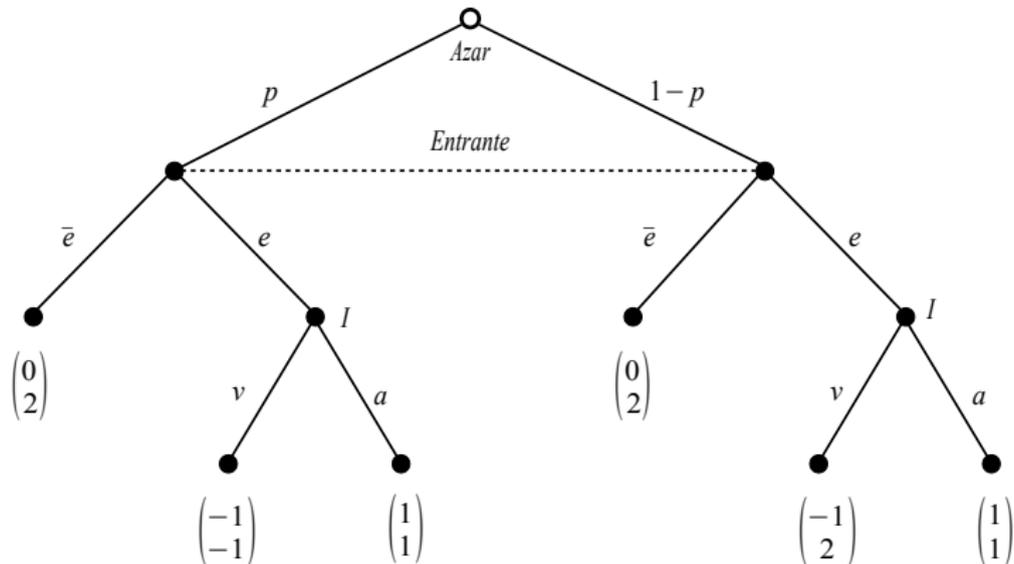
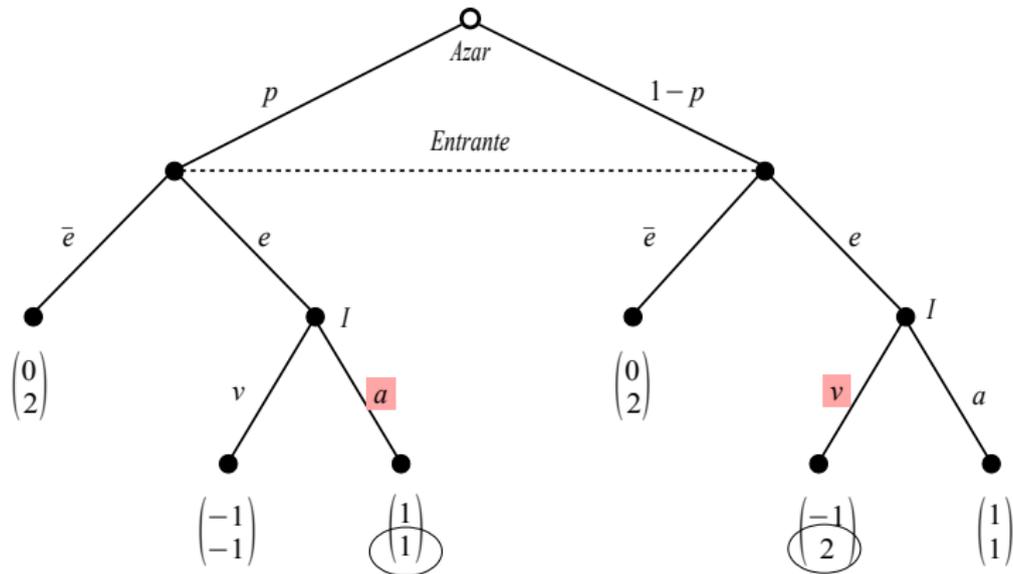


Figura: ENPSJ





## Comentario económico “aburrido”

- El ENPSJ muestra que se puede disuadir la entrada al mercado con asimetría de información.
- Este no era un resultado posible para Selten (el que inventó el ENPSJ).
- La asimetría de información puede disuadir a  $E$  de entrar a mercado.
- Si sospecha ( $p < 1/2$ ) que el rival es “loco” no entrará al mercado.
- El instalado puede utilizar una estrategia de generar reputación para disuadir a las empresas de entrar al mercado.

# Índice

Juegos bayesianos (🤔)

Ejemplos (😍)

Una variante de BoT

Entrada al mercado (+ complicado)

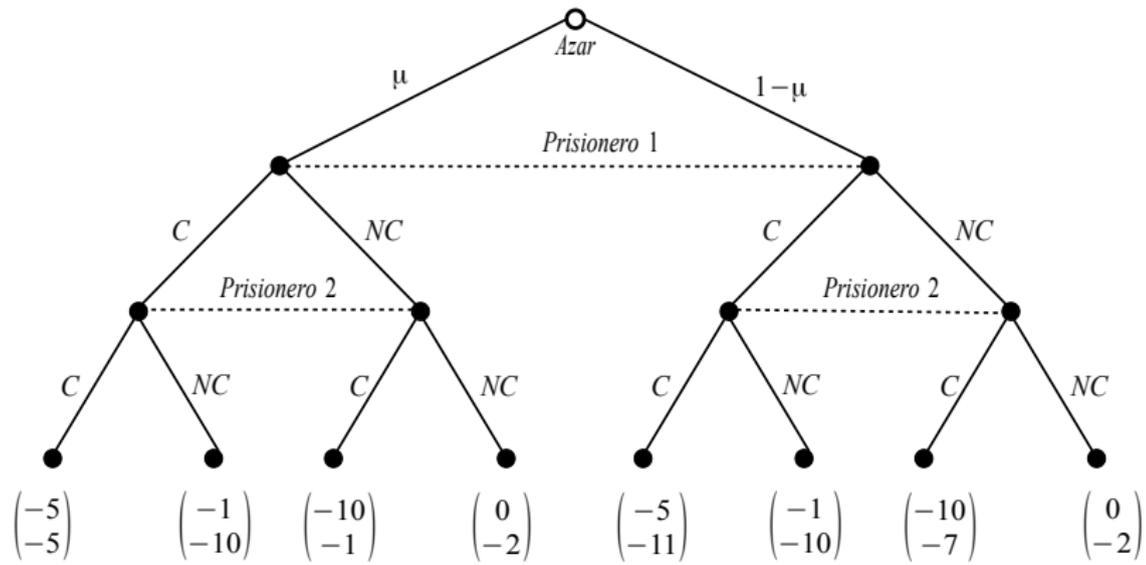
El amigo del fiscal (un poco + complicado...)

Principio de revelación (😞)





# En forma extensiva



## Explicación

- Cada línea punteada representa un conjunto de información.
- El jugador tiene que tomar una decisión sin saber en qué nodo se encuentra.
- Estrategias:
  - Prisionero 1:  $\{C, NC\}$ .
  - Prisionero 2:  $\{C, C; C, NC; NC, C; CN, NC\}$ .
- El Prisionero 2 tiene dos nodos de decisión, uno para cada tipo.
- Ex ante no lo conoce; cuando le toca mover sí.





# Índice

Juegos bayesianos (🤔)

Ejemplos (😍)

Una variante de BoT

Entrada al mercado (+ complicado)

El amigo del fiscal (un poco + complicado...)

Principio de revelación (😞)

## Principio de revelación

- Myerson (1979) propone un mecanismo para diseñar juegos con información privada.
- Procede en tres partes:
  1. determinar los mecanismos directos,
  2. establecer cuáles permiten decir la verdad; esto es, es incentivo compatible.

## Mecanismos directos y honestidad

- En un juego bayesiano existen múltiples mecanismos para llegar a un equilibrio.

### Definición

un juego bayesiano en el cuál la única acción del jugador es hacer una declaración sobre su tipo se llama **mecanismo directo**.

- De todos los mecanismos directos, algunos implican que el agente es honesto respecto a sus tipos y en otros no.

### Definición

un mecanismo directo en el cual decir la verdad es un EBN es **compatible en incentivos**.



