Teoría de juegos en forma normal

Microeconomía III

Facultad de Ciencias Económicas y Administración

Licenciatura en Economía

Objetivos

1. Definir juegos
2. Presentar juegos en forma normal y las nociones de equilibrio
3. Determinar estrategias mixtas

Índice

Juegos

- Un juego es la representación formal de una situación estratégica

Interacción estratégica

el bienestar del agente depende de sus acciones y de la de los otros jugadores

- Pueden representar rivalidad o problemas de coordinación
- Representación: en forma normal (o estratégica) o extensiva
- Etapas: representación - solución

Componentes

1. **Jugadores**: ¿quién está involucrado?
2. **Reglas**: ¿cómo mueven?; ¿qué saben cuando mueven?; ¿qué pueden hacer?
3. **Resultados**: para cada conjunto posible de acciones de los jugadores: ¿cuáles son los resultados del juego?
4. **Pagos:** ¿cuáles son las preferencias de los jugadores sobre los posibles resultados?

Información

1. Información perfecta: cuando todos los jugadores tienen toda la información relacionada con las acciones previas de los restantes jugadores que afectan la decisión de éste sobre la acción a tomar en un momento particular.
2. Información completa: cuando todos los jugadores conocen la estructura del juego y los pagos de los restantes jugadores, pero no necesariamente sus acciones.

Índice

Presentación

Definición

Un **juego en forma normal** es una terna

$G = \{I; (S_i)_{i=1}^{n}; u_i(s_i, s_{-i})\}$, donde:

I es el conjunto de jugadores; $I = 1, ..., n$

S_i que es el espacio de acciones para cada jugador $(s_i \in S_i)$

u_i es la función de utilidad asociada a cada resultado del juego para cada jugador.

Ejemplo

- Ejemplo: Dilema del prisionero
  - Jugadores: prisionero 1, prisionero 2
  - Acciones (estrategias): $S_i = \{c, \overline{c}\}$, $i = 1, 2$, donde c es confesar y $\overline{c}$ no confesar
  - Estructura: juegan sin saber lo que hace el otro
  - Pagos: a- si ambos confiesan tienen una pena de 5 años; b- si el prisionero 1 no confiesa pero el 2 si, el primero obtiene una pena de 10 años y el segundo una pena de 1 año por colaborar con la justicia; c- si ninguno confiesa ambos son procesados por un delito menor y obtienen una pena de 2 años

Representación

Prisionero 2

		c	$\overline{c}$
Prisionero 1	c	-5, -5	-1, -10
	$\overline{c}$	-10, -1	-2, -2

Índice

Dominancia (I)

Definición

Decimos que una estrategia $s_i^{'}$ está **estrictamente dominada** si independientemente de la acción que pueda tomar el otro jugador, la utilidad asociada a esta estrategia es estrictamente menor a alguna otra estrategia que pueda jugar el jugador i. Formalmente, s_i es una estrategia estrictamente dominada si existe $s_i^{''}$ tal que $\forall s_{-i} \in S_{-i}$ se cumple que:

$$u_i\left(s_i^{''}, s_{-i}\right) > u_i\left(s_i^{'}, s_{-i}\right)$$

Dominancia (II)

- Un jugador racional no jugaría nunca una estrategia estrictamente dominada
- Si la racionalidad es conocimiento común (o de dominio público), se puede proceder a la **Eliminación Iterativa de Estrategias Estrictamente Dominadas**

Índice

Ejemplo

- ¿Cuál sería el equilibrio por eliminación iterativa de estrategias estrictamente dominadas?

		Jugador 2		
		Bueno	Regular	Malo
	Alto	1, 1	2, 0	1, 1
Jugador 1	Medio	0, 0	0, 1	0, 0
	Bajo	2, 1	1, 0	2, 2

Ejemplo (cont.)

- *J*1: *Medio* está estrictamente dominada

		Jugador 2		
		Bueno	Regular	Malo
	Alto	1, 1	2, 0	1, 1
Jugador1	~~**Medio**~~	~~**0, 0**~~	~~**0, 1**~~	~~**0, 0**~~
	Bajo	2, 1	1, 0	2, 2

Ejemplo (cont.)

- *J2*: *Regular* está estrictamente dominada

		Jugador 2		
		Bueno	~~Regular~~	Malo
	Alto	1, 1	~~2, 0~~	1, 1
Jugador 1	~~Medio~~	~~0, 0~~	~~0, 1~~	~~0, 0~~
	Bajo	2, 1	~~1, 0~~	2, 2

Ejemplo (cont.)

- *J*1: *Alto* está estrictamente dominada

		Jugador 2		
		Bueno	~~Regular~~	Malo
	~~Alto~~	~~1, 1~~	~~2, 0~~	~~1, 1~~
Jugador 1	~~Medio~~	~~0, 0~~	~~0, 1~~	~~0, 0~~
	Bajo	2, 1	~~1, 0~~	2, 2

Ejemplo (cont.)

- *J*2: *Bueno* está estrictamente dominada

		Jugador 2		
		~~Bueno~~	~~Regular~~	Malo
	~~Alto~~	~~1, 1~~	~~2, 0~~	~~1, 1~~
Jugador 1	~~Medio~~	~~0, 0~~	~~0, 1~~	~~0, 0~~
	Bajo	~~2, 1~~	~~1, 0~~	2, 2

Ejemplo (cont.)

- EEIEED $=$ {bajo, malo}

		Jugador 2		
		Bueno	Regular	**Malo**
	Alto	1, 1	2, 0	1, 1
Jugador 1	Medio	0, 0	0, 1	0, 0
	Bajo	2, 1	1, 0	**2, 2**

Índice

Estrategias dominantes

Definición

Decimos que una estrategia s_i es una **estrategia estrictamente dominante** para el jugador i en un juego en forma normal G si $\forall s_i' \neq s_i$, se cumple que:

$$u_i(s_i, s_{-i}) > u_i\left(s_i', s_{-i}\right) \qquad \forall s_{-i} \in S_{-i}$$

- Una estrategia dominante para el jugador i maximiza su pago para cualquier estrategia que el rival pueda jugar.

Estrategias dominantes

Definición

Decimos que una estrategia s_i es una **estrategia estrictamente dominante** para el jugador i en un juego en forma normal G si $\forall s_i' \neq s_i$, se cumple que:

$$u_i(s_i, s_{-i}) > u_i\left(s_i', s_{-i}\right) \qquad \forall s_{-i} \in S_{-i}$$

- Una estrategia dominante para el jugador i maximiza su pago para cualquier estrategia que el rival pueda jugar.

Índice

Mejor respuesta

Definición

En el juego en forma normal G, la estrategia s_i es una **mejor respuesta** del jugador i a las estrategias s_{-i} de sus rivales si se cumple que:

$$u_i\left(s_i, s_{-i}\right) > u_i\left(s_i^{'}, s_{-i}\right), \qquad \forall s_i^{'} \in S_i$$

Definición

En el juego en forma normal G, la estrategia s_i no es **nunca una mejor respuesta** si no existe s_{-i} para el cual s_i sea una mejor respuesta.

Estrategias racionalizables

- Un jugador racional no jugaría nunca una estrategia que no es nunca una mejor respuesta
- Una estrategia estrictamente dominada no es nunca una mejor respuesta (no se cumple recíproco)
- Si la racionalidad es de conocimiento común $\Rightarrow$
- Se puede eliminar en forma iterativa las estrategias que no son nunca una mejor respuesta (por lo anterior)

Estrategias racionalizables (cont.)

Definición

En el juego G en forma normal, las estrategias en S_i que sobreviven la eliminación de estrategias que no son nunca una mejor respuesta son las estrategias del jugador i que son **racionalizables**

- El conjunto de estrategias racionalizables no puede ser mayor que el conjunto de estrategias que sobrevive la eliminación iterativa de estrategias estrictamente dominadas
- Una estrategia racionalizable es aquella que el jugador i puede justificar o racionalizar, en base a las acciones de sus rivales

Índice

Equilibrio de Nash

Definición

Un conjunto de estrategias $(s_1^*, \ldots, s_n^*)$ es un **Equilibrio de Nash** (EN) si $\forall i = 1, \ldots, n$, se cumple que

$$u_i\left(s_i^*, s_{-i}^*\right) > u_i\left(\widetilde{s}_i, s_{-i}^*\right), \qquad \forall \widetilde{s}_i \in S_i$$

- De otra forma: s_i^* resuelve $\underset{s_i \in S_i}{max}\, u_i\left(s_i, s_{-i}^*\right)$
- En un EN cada jugador esta jugando la mejor respuesta a las mejor respuesta de sus rivales.

Equilibrio de Nash

Definición

Un conjunto de estrategias $(s_1^*, \ldots, s_n^*)$ es un **Equilibrio de Nash** (EN) si $\forall i = 1, \ldots, n$, se cumple que

$$u_i\left(s_i^*, s_{-i}^*\right) > u_i\left(\tilde{s}_i, s_{-i}^*\right), \qquad \forall \tilde{s}_i \in S_i$$

- De otra forma: s_i^* resuelve $\underset{s_i \in S_i}{max}\, u_i\left(s_i, s_{-i}^*\right)$
- En un EN cada jugador esta jugando la mejor respuesta a las mejor respuesta de sus rivales.

Ejemplo

- En el ejemplo: *no confesar* es una estrategia estrictamente dominada
- En el ejemplo: *confesar* es una estrategia estrictamente dominante
- $\{c, c\}$ es un EN en el Dilema del prisionero.

Representación

Prisionero 2

		$\boxed{c}$	$\overline{c}$
Prisionero 1	$\boxed{c}$	**-5, -5**	-1, -10
	$\overline{c}$	-10, -1	-2, -2

Problema: múltiples equilibrios

- Juego de "Encontrarse en Montevideo"

		Jugador 2	
		P	C
Jugador 1	P	1, 1	0, 0
	C	0, 0	1, 1

- Hay dos EN !

Índice

Presentación

- No todos los juegos tienen equilibrios en estrategias puras
- Jugar una estrategia -pura- implica asignar probabilidad 1 a esa acción y 0 al resto
- Una alternativa es aleatorizar las acciones
- Una **estrategia mixta** asigna una probabilidad a cada estrategia pura

Ejemplos

- Piedra, papel y tijera
- "Matching pennies" (monedas que se igualan)
- Fútbol, básquetbol
- Característica: me conviene adivinar la jugada del otro, pero que el no adivine la mía $\Rightarrow$ no existe EN en estrategias puras

Definiciones

Definición

Sea $S_i = (s_{i1}, ..., s_{iK})$ el conjunto de K estrategias puras del jugador i. Definimos a P_i como el **simplex** de S_i que es el conjunto de todas las distribuciones de probabilidad sobre S_i.

Definición

una **estrategia mixta** es un elemento $p_i \in P_i$ tal que $p_i = (p_{i1}, ..., p_{iK})$ en la que p_{ik} es la probabilidad de que el jugador i elija la estrategia s_{ik} para $k = 1, ..., K$. Se cumple que $0 \leq p_{ik} \leq 1$ y $\sum_{k=1}^{k=K} p_{ik} = 1$.

Definiciones (cont.)

Definición

Una **creencia o conjetura** (belief) para el jugador i es una distribución de probabilidades $\pi_i \in P_{-i}$ sobre las estrategias de su oponente. Escribimos $\pi_i(s_{-i})$ a la probabilidad que el jugador i asigna a que su oponente juegue $s_{-i} \in S_{-i}$.

Definición

La **utilidad esperada** del jugador i cuando elije jugar la estrategia pura $s_i \in S_i$ y su oponente elije la estrategia mixta $p_{-i} \in P_{-i}$ es

$$v_i(s_i, p_{-i}) = E[u_i(s_i, p_{-i})] = \sum_{s_{-i} \in S_{-i}} p_{-i}(s_{-i}) u_i(s_i, s_{-i})$$

Definiciones (cont.)

- La **utilidad esperada** del jugador i cuando elije jugar la estrategia mixta $p_i \in P_i$ y su oponente elije $p_{-i} \in P_{-i}$ es

$$v_i\left(p_i, p_{-i}\right) = \sum_{s_i \in S_i} \left(\sum_{s_{-i} \in S_{-i}} p_i\left(s_i\right) p_{-i}\left(s_{-i}\right) u_i\left(s_i, s_{-i}\right) \right)$$

Definición

El perfil de estrategias $p^* = \left(p_1^*, ..., p_n^*\right)$ es un **equilibrio de Nash** en estrategias mixtas si para cada jugador i, p_i^* es la mejor respuesta a p_{-i}^*. Esto es, si para cada $i \in I$,

$$v_i\left(p_i^*, p_{-i}^*\right) \geq v_i\left(p_i, p_{-i}^*\right), \quad \forall p_i \in P_i$$

Ejemplo

- Juego: "Matching pennies" (monedas que se igualan)
- Jugadores: $\{1, 2\}$
- Estrategias: $\{cara, cruz\}$ de una moneda
- Si coinciden $\Rightarrow$ gana $J2$ la moneda de $J1$; si se cruzan $\Rightarrow$ gana $J1$ la moneda de $J2$

Representación

		Jugador 2	
		Cara	Cruz
Jugador 1	Cara	-1, 1	1, -1
	Cruz	1, -1	-1, 1

- No hay EN en estrategias puras (verifiquen!)

Solución: jugador 1

- Creencias: $J1$ cree que $J2$: $p_2(cara) = q$ y $p_2(cruz) = 1 - q \Rightarrow$ $J2$ juega mixta $(q, 1 - q)$
- $v_1(cara, q) = p_2(cara)\,u(cara, cara) + p_2(cruz)\,u(cara, cruz)$ $= q(-1) + (1 - q)1 = 1 - 2q$
- $v_1(cruz, q) = p_2(cara)\,u(cruz, cara) + p_2(cruz)\,u(cruz, cruz)$ $= q1 + (1 - q)(-1) = 2q - 1$
- $\Rightarrow$ elije *cara* si $1 - 2q > 2q - 1 \iff 4q < 2 \iff q < 1/2 \Rightarrow$ elije *cruz* $\iff q > 1/2$
- Si $q = 1/2$ es indiferente entre *cara* y *cruz*

Solución: jugador 1 (cont.)

- Ahora el $J1$: $p_1(cara) = r$ y $p_1(cruz) = 1 - r \Rightarrow J1$ juega mixta $(r, 1 - r)$
- $\Rightarrow$ Utilidad $J1$ juegue mixta $(p_1) = (r, 1 - r)$ a mixta de $J2$ $(p_2) = (q, 1 - q)$
- $v_1(p_1, p_2) =$
$p_1(cara)[p_2(cara)u(cara, cara) + p_2(cruz)u(cara, cruz)]$
$+p_1(cruz)[p_2(cara)u(cruz, cara) + p_2(cruz)u(cruz, cruz)]$
- $= r[q(-1) + (1 - q)1] + (1 - r)[q1 + (1 - q)(-1)]$
- $= r[1 - 2q] + (1 - r)[2q - 1] = (2q - 1) + r(2 - 4q)$

Solución: jugador 1 (cont.)

- $v_1(p_1, p_2) = (2q-1) + r(2-4q) \Rightarrow$

$$\frac{\partial v_1(p_1, p_2)}{\partial r} = \begin{cases} > 0 & si\ 2-4q > 0 \\ < 0 & si\ 2-4q < 0 \end{cases}$$

- $\Rightarrow$ si $2-4q > 0 \iff q < 1/2 \Rightarrow r = 1$ (utilidad crece con r) $\Rightarrow$ *J1* juega *cara*
- $\Rightarrow$ si $2-4q < 0 \iff q > 1/2 \Rightarrow r = 0$ (utilidad cae con r) $\Rightarrow$ *J1* juega *cruz*
- $\Rightarrow$ si $2-4q = 0 \iff q = 1/2 \Rightarrow r$ está indeterminado $\Rightarrow$ *J1* juega cualquier cosa
- Gráficamente

Solución: jugador 1 (gráfica)

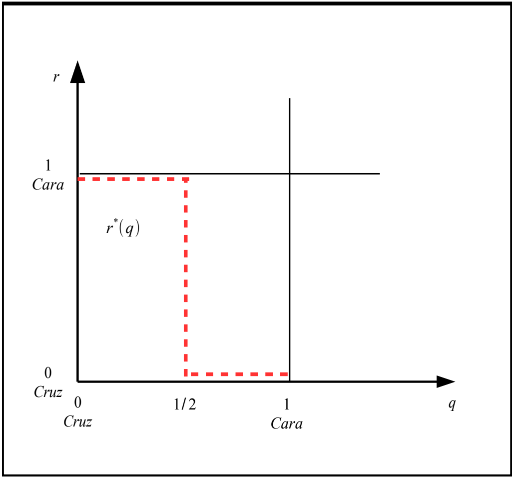
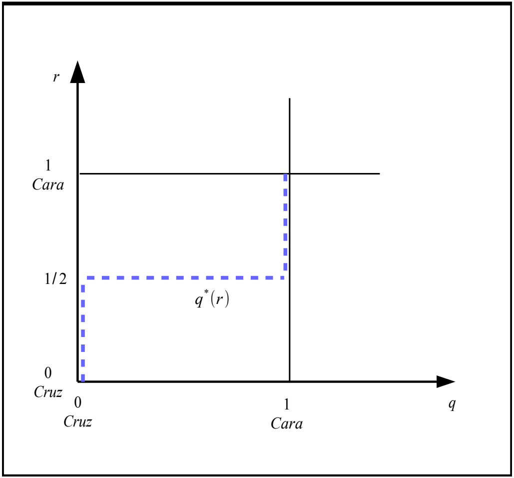


Figura: Reacción de J1

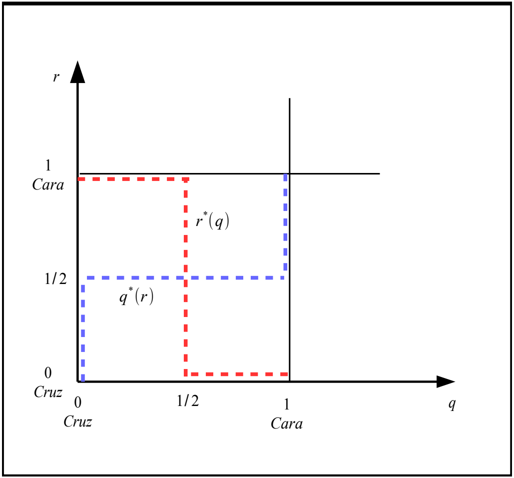
Solución: jugador 2

- Repetimos el mismo procedimiento para el $J2$
- Creencias: el $J2$ cree que $J1$: $p_1(cara) = r$ y $p_1(cruz) = 1 - r$ $\Rightarrow J1$ juega mixta $(r, 1 - r)$
- $J2$: $p_2(cara) = q$ y $p_2(cruz) = 1 - q \Rightarrow J1$ juega mixta $(q, 1 - q)$
- $v_2(p_2, p_1) = q[r1 + (1 - r)(-1)] + (1 - q)[r(-1) + (1 - r)1]$ $= (1 - 2r) + q(4r - 2)$
- $\Rightarrow$ creciente en $q \iff r > 1/2$; decreciente en q $\iff r < 1/2$
- Gráficamente

Solución: jugador 2 (gráfica)



Solución: EN



Solución: EN

- El único EN en estrategias mixtas es $(p_1^*, p_2^*) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$
- Notas:
  - la estrategia mixta del jugador j es una representación de la incertidumbre del jugador i respecto a la estrategia pura de j
  - es como si j tuviera información privada que determina que estrategia pura elija, pero i no conoce esa información y, por tanto, la estrategia mixta representa su incertidumbre (de i)
- Más sobre el tema en "Juegos bayesianos"