

Teoría de juegos

Organización Industrial

Licenciatura en Economía



FACULTAD DE
CIENCIAS ECONÓMICAS
Y DE ADMINISTRACIÓN



UNIVERSIDAD
DE LA REPÚBLICA
URUGUAY

Objetivos

1. Definir juegos
2. Presentar juegos en forma normal y estratégica
3. Presentar las nociones de equilibrio

Índice

Juegos

Presentación

Juegos en forma normal

Representación

Solución

Juegos en forma extensiva

Definición

ENPSJ

Juegos repetidos

Juegos repetidos: finitos

Juegos repetidos: infinitos

Índice

Juegos

Presentación

Juegos en forma normal

Representación

Solución

Juegos en forma extensiva

Definición

ENPSJ

Juegos repetidos

Juegos repetidos: finitos

Juegos repetidos: infinitos

Juegos

- ▶ Un juego es la representación formal de una situación estratégica

Interacción estratégica

el bienestar del agente depende de sus acciones y de la de los otros jugadores

- ▶ Pueden representar rivalidad o problemas de coordinación
- ▶ Representación: en forma normal (o estratégica) o extensiva
- ▶ Etapas: representación - solución

Componentes

1. **Jugadores:** ¿quién está involucrado?
2. **Reglas:** ¿cómo mueven?; ¿qué saben cuando mueven?; ¿qué pueden hacer?
3. **Resultados:** para cada conjunto posible de acciones de los jugadores: ¿cuáles son los resultados del juego?
4. **Pagos:** ¿cuáles son las preferencias de los jugadores sobre los posibles resultados?

Información

1. **Información perfecta:** cuando todos los jugadores tienen toda la información relacionada con las acciones previas de los restantes jugadores que afectan la decisión de éste sobre la acción a tomar en un momento particular.
2. **Información completa:** cuando todos los jugadores conocen la estructura del juego y los pagos de los restantes jugadores, pero no necesariamente sus acciones.

Presentación

Definición

Un **juego en forma normal** es una terna

$\Gamma_N = \left\{ I; (S_i)_{i=1}^I; u_i(s_i, s_{-i}) \right\}$, donde I es el conjunto de jugadores; S_i que es el espacio de acciones para cada jugador y u_i que es la función de utilidad asociada a cada resultado del juego para cada jugador.

Ejemplo

- ▶ Ejemplo: Dilema del prisionero
 - ▶ Jugadores: prisionero 1, prisionero 2
 - ▶ Acciones (estrategias): $S_i = \{c, \bar{c}\}$, $i = 1, 2$, donde c es confesar y \bar{c} no confesar
 - ▶ Estructura: juegan sin saber lo que hace el otro
 - ▶ Pagos: a- si ambos confiesan tienen una pena de 5 años; b- si el prisionero 1 no confiesa pero el 2 si, el primero obtiene una pena de 10 años y el segundo una pena de 1 año por colaborar con la justicia; c- si ninguno confiesa ambos son procesados por un delito menor y obtienen una pena de 2 años

Representación

| | | | |
|--------------|-----------|--------------|-----------|
| | | Prisionero 2 | |
| | | c | \bar{c} |
| Prisionero 1 | c | -5, -5 | -1, -10 |
| | \bar{c} | -10, -1 | -2, -2 |

Dominancia (I)

Definición

Decimos que una estrategia s_i está **estrictamente dominada** si independientemente de la acción que pueda tomar el otro jugador, la utilidad asociada a esta estrategia es estrictamente menor a alguna otra estrategia que pueda jugar el jugador i . Formalmente, s_i es una estrategia estrictamente dominada si existe \tilde{s}_i tal que $\forall s_{-i} \in S_{-i}$ se cumple que:

$$u_i(\tilde{s}_i, s_{-i}) > u_i(s_i, s_{-i})$$

Dominancia (II)

- ▶ Un jugador racional no jugaría nunca una estrategia estrictamente dominada
- ▶ Si la racionalidad es conocimiento común, se puede proceder a la **Eliminación Iterativa de Estrategias Estrictamente Dominadas**

Estrategias dominantes

Definición

Decimos que una estrategia s_i es una **estrategia estrictamente dominante** para el jugador i en un juego en forma normal si $\forall s'_i \neq s_i$, se cumple que:

$$u_i(s_i, s_{-i}) > u_i(s'_i, s_{-i})$$

$\forall s_{-i} \in S_{-i}$.

- ▶ Una estrategia dominante para el jugador i maximiza su pago para cualquier estrategia que el rival pueda jugar.

Equilibrio de Nash

Definición

Un conjunto de estrategias (s_1, \dots, s_N) es un **Equilibrio de Nash (EN)** si $\forall i = 1, \dots, I$, se cumple que

$$u_i(s_i, s_{-i}) > u_i(\tilde{s}_i, s_{-i}), \quad \forall \tilde{s}_i \in S_i$$

- ▶ En un EN cada jugador esta jugando la mejor respuesta a las mejor respuesta de sus rivales.

Ejemplo

- ▶ En el ejemplo: *noconfesar* es una estrategia estrictamente dominada
- ▶ En el ejemplo: *confesar* es una estrategia estrictamente dominante
- ▶ $\{c, c\}$ es un EN en el Dilema del prisionero.

Representación

| | | Prisionero 2 | |
|--------------|-----------|---------------|-----------|
| | | c | \bar{c} |
| Prisionero 1 | c | -5, -5 | -1, -10 |
| | \bar{c} | -10, -1 | -2, -2 |

Definición

- Un **juego en forma extensiva** es:
1. un árbol de juego conteniendo un nodo inicial, otros nodos de decisión, nodos terminales, y ramas que conectan cada nodo de decisión con el nodo sucesor
 2. una lista de $N \geq 1$ jugadores, indexados por $i, i = 1, \dots, N$
 3. para cada nodo de decisión la asignación del jugador que debe decidir una acción
 4. para cada jugador i , la especificación del conjunto de acciones de i en cada nodo de decisión en el cual tenga que elegir una acción
 5. la especificación de los pagos de cada jugador en cada nodo terminal

Subjuegos

Definición

una **estrategia** para el jugador i , $s_i \in S_i$ es una lista completa de acciones, una acción para cada nodo de decisión en el cual el jugador tenga que actuar

Definición

un **subjuego** empieza en cualquier nodo de decisión del juego original e incluye todos los nodos de decisión siguientes y sus correspondientes nodos terminales

Índice

Juegos

Presentación

Juegos en forma normal

Representación

Solución

Juegos en forma extensiva

Definición

ENPSJ

Juegos repetidos

Juegos repetidos: finitos

Juegos repetidos: infinitos

Definición

Definición

un resultado es un **Equilibrio de Nash Perfecto por subjugos** (ENPSJ) si induce un EN en cada subjuego del juego original

- ▶ El ENPSJ es un refinamiento del EN
- ▶ Permite encontrar resultados consistentes

Definición

Definición

un resultado es un **Equilibrio de Nash Perfecto por subjugos** (ENPSJ) si induce un EN en cada subjuego del juego original

- ▶ El ENPSJ es un refinamiento del EN
- ▶ Permite encontrar resultados consistentes

Ejemplo

- ▶ Dos jugadores; $i = (E)lla, E(L)$
- ▶ Acciones: c - ir al cine a ver una película de acción; b - ir a bailar
- ▶ Ambos prefieren pasar el día juntos, pero E prefiere ir a bailar mientras que L prefiere ir a ver una película de acción
- ▶ Estructura del juego: primero decide E qué hacer y luego elige L sabiendo lo que E eligió antes
- ▶ Representación gráfica:

Ejemplo

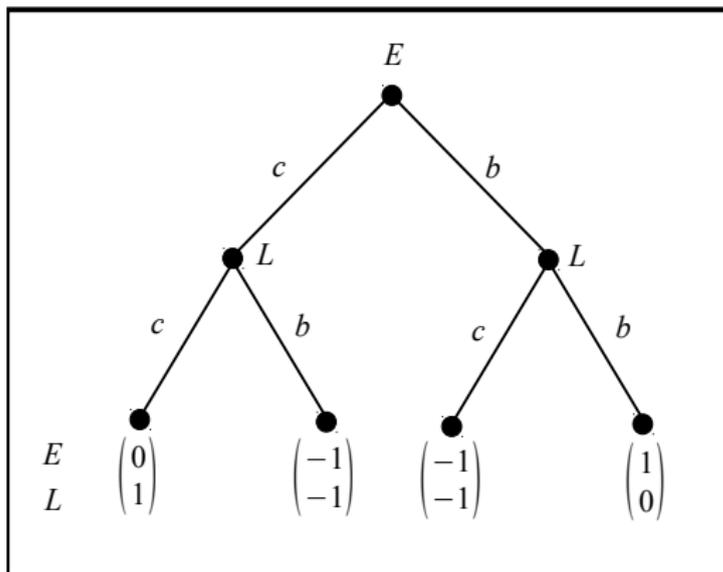


Figura: Juego de la batalla de los sexos.

Ejemplo (cont.)

- ▶ Estrategias: $S_E = \{c; b\}$, $S_L = \{c, c; c, b; b, b; b, c\}$.
- ▶ E tiene sólo dos acciones en un nodo: decide c o decide b
- ▶ L tiene **dos** acciones en **dos** nodos
- ▶ Solución: por inducción hacia atrás.

Solución

- ▶ Etapa 2: vemos que decisión tomaría L en cada nodo en el que le tocaría jugar
- ▶ Gráficamente representamos a la izquierda el subjuego correspondiente al nodo de L de la izquierda del juego original, y a la derecha el subjuego correspondiente al nodo de L de la derecha del juego original

Gráfica

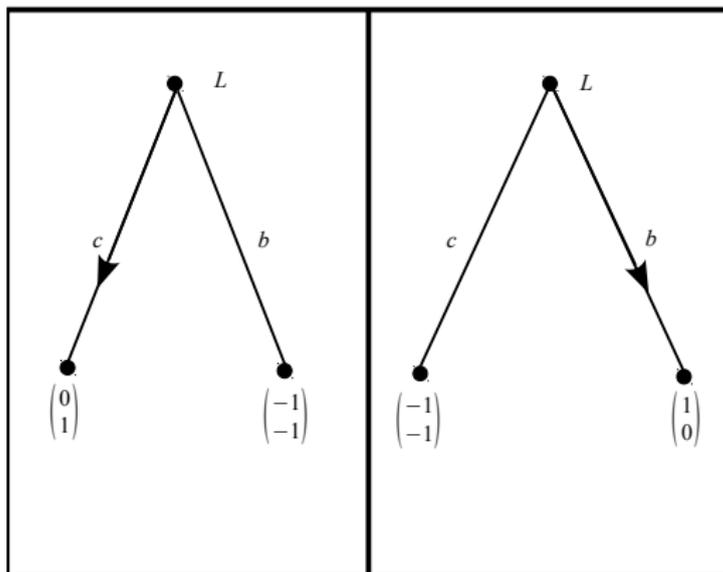


Figura: Subjuegos, con sus correspondientes equilibrios de Nash.

Solución (cont.)

- ▶ El EN del subjuego de la izquierda (si E juega c) es jugar c ($1 > 0$)
- ▶ El EN del subjuego de la derecha (si E juega b) es jugar b ($0 > -1$)
- ▶ Como era de esperar, el caballero hace lo que la dama diga
- ▶ ¿Qué hará entonces E ?
- ▶ La decisión de E estudiando que haría al enfrentarse con las decisiones de L , reduciendo el juego original sustituyendo por las decisiones de L .

Gráfica

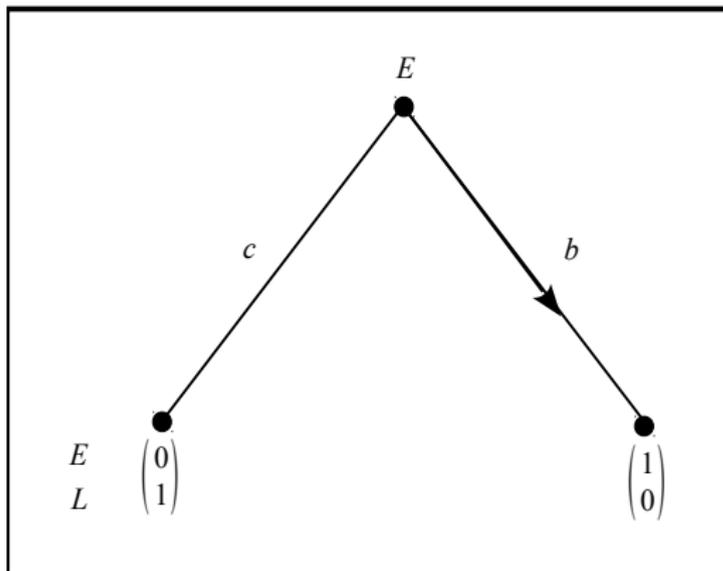


Figura: La decisión de E , tomando en consideración las decisiones de L posteriores.

Solución (cont.)

- ▶ El resultado del juego: el ENPSJ es $\{b; c, b\}$.
- ▶ Sin embargo, hay dos EN $\{b, cb; b, bb\}$
- ▶ En los juegos dinámicos es normal encontrar múltiples EN
- ▶ Muchos de ellos no son creíbles
- ▶ Sea el siguiente juego de entrada a mercado

Ejemplo

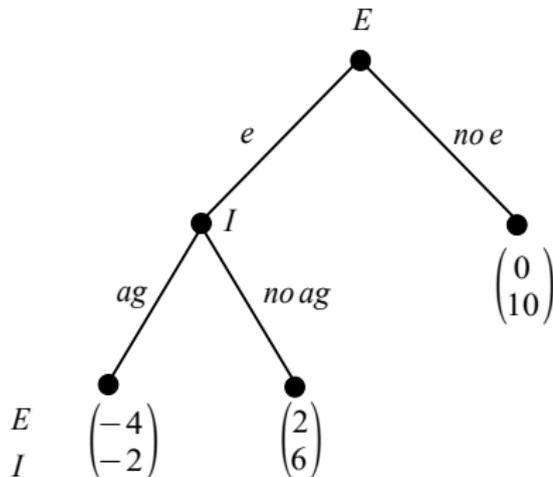


Figura: Juego de entrada al mercado.

Solución

- ▶ Dos jugadores: $\{I, E\}$
- ▶ E decide si entra o no; I si E entra decide si es agresivo o no
- ▶ Existen dos EN: $\{e, noag; ne, ag\}$
- ▶ Sin embargo, ne, ag es una amenaza no creíble
- ▶ Sólo $\{e, noag\}$ es un ENPSJ

Presentación

- ▶ Sea $G = \{I; (S_i)_{i=1}^n; u_i(s_i, s_{-i})\}$ el juego en forma normal en una etapa

Definición

dado un juego G en una etapa, $G(T)$ denota el **juego repetido finito**, en el que G se juega T veces, habiendo los jugadores observado los resultados de todas las jugadas anteriores antes de empezar la siguiente. Las ganancias de $G(T)$ son la suma de las ganancias de los T juegos de una etapa.

Proposiciones

Teorema

Si el juego en forma normal G tiene un único EN \Rightarrow para cualquier T finito, el juego repetido $G(T)$ tiene un único ENPSJ: en cada etapa se juega el EN de G

Teorema

Si el juego en forma normal G tiene múltiples EN \Rightarrow pueden existir resultados perfectos en subjugos del juego repetido $G(T)$ en los que, para cualquier $t < T$, el resultado en la etapa t no sea un EN de G

Ejemplo 1

- ▶ Sea el juego del dilema del prisionero jugado dos veces



| | | | |
|------|-------|-------|-------|
| | | J. 2 | |
| | | I_2 | D_2 |
| J. 1 | I_1 | 1, 1 | 5, 0 |
| | D_1 | 0, 5 | 4, 4 |

Un período



| | | | |
|------|-------|-------|-------|
| | | J. 2 | |
| | | I_2 | D_2 |
| J. 1 | I_1 | 2, 2 | 6, 1 |
| | D_1 | 1, 6 | 5, 5 |

Dos períodos

Ejemplo 1

- ▶ Sea el juego del dilema del prisionero jugado dos veces



| | | | |
|------|-------|-------|-------|
| | | J. 2 | |
| | | I_2 | D_2 |
| J. 1 | I_1 | 1, 1 | 5, 0 |
| | D_1 | 0, 5 | 4, 4 |

Un período



| | | | |
|------|-------|-------|-------|
| | | J. 2 | |
| | | I_2 | D_2 |
| J. 1 | I_1 | 2, 2 | 6, 1 |
| | D_1 | 1, 6 | 5, 5 |

Dos períodos

Ejemplo 1 (cont.)

- ▶ La figura de la izquierda es el juego en una etapa
- ▶ La figura de la derecha es el juego en dos etapas que incluye los pagos de la segunda etapa
- ▶ Como el EN en una etapa es $(I_1, I_2) \Rightarrow$ el juego en dos etapas incluye los pagos de jugar (I_1, I_2) en $t = 2$
- ▶ \Rightarrow el EN es (I_1, I_2) en $t = 1$ y (I_1, I_2) en $t = 2$

Ejemplo 2

- ▶ Juego del dilema del prisionero modificado

| | | | | |
|------|-------|-------|-------|-------|
| | | J. 2 | | |
| | | I_2 | C_2 | D_2 |
| J. 1 | I_1 | 1, 1 | 5, 0 | 0, 0 |
| | C_1 | 0, 5 | 4, 4 | 0, 0 |
| | D_1 | 0, 0 | 0, 0 | 3, 3 |

Ejemplo 2 (cont.)

- ▶ El juego tiene 2 EN: $\{(I_1, I_2), (D_1, D_2)\}$
- ▶ Ahora es posible que los jugadores prevean equilibrios diferentes en $t = 2$ si hay resultados diferentes en $t = 1$
- ▶ Ej.: (D_1, D_2) en $t = 2$ si se juega (C_1, C_2) en $t = 1$; pero (I_1, I_2) en $t = 2$ si se juega cualquiera de los otros resultados en $t = 1$
- ▶ La matriz que representa estos pagos es

Ejemplo 2

| | | | | |
|------|-------|-------|-------|-------|
| | | J. 2 | | |
| | | I_2 | C_2 | D_2 |
| J. 1 | I_1 | 2, 2 | 6, 1 | 1, 1 |
| | C_1 | 1, 6 | 7, 7 | 1, 1 |
| | D_1 | 1, 1 | 1, 1 | 4, 4 |

Ejemplo 2

- ▶ Este juego tiene 3 EN en estrategias puras:
 $\{(I_1, I_2), (C_1, C_2), (D_1, D_2)\}$
- ▶ El EN (I_1, I_2) corresponde a jugar (I_1, I_2) en $t = 1$ y en $t = 2$
- ▶ El EN (D_1, D_2) corresponde a jugar (D_1, D_2) en $t = 1$ y (I_1, I_2) en $t = 2$
- ▶ El EN (C_1, C_2) corresponde a jugar (C_1, C_2) en $t = 1$ y (D_1, D_2) en $t = 2$
- ▶ Ahora surge la cooperación en $t = 1$, aunque de forma poco creíble
- ▶ Se prevé jugar (I_1, I_2) con pagos $(1, 1)$ en cualquier caso menos si se juega (C_1, C_2) que prevé jugar (D_1, D_2) con pagos $(3, 3)$

Índice

Juegos

Presentación

Juegos en forma normal

Representación

Solución

Juegos en forma extensiva

Definición

ENPSJ

Juegos repetidos

Juegos repetidos: finitos

Juegos repetidos: infinitos

Definición

Definición

dado un factor de descuento δ el **valor presente** de la sucesión infinita de pagos π_1, π_2, \dots es

$$\pi_1 + \delta\pi_2 + \delta^2\pi_3 + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} \delta^{t-1} \pi_t$$

Definición

Definición

Dado un juego en una etapa G llamaremos $G(\infty, \delta)$ al **juego repetido infinitamente** en el que G se repite por siempre y los jugadores tienen el mismo factor de descuento δ .

Para cada t , los resultados de las $t - 1$ jugadas anteriores del juego de etapa son conocidos antes de que empiece la t -ésima etapa.

La utilidad para cada jugador en $G(\infty, \delta)$ es el valor presente de las ganancias que el jugador obtiene en la sucesión infinita de juegos de etapa.

Definición

Definición

Una **estrategia pura** en un juego repetido infinitamente para el jugador i es una secuencia de funciones $\{s_{it}(\cdot)\}_{t=1}^{\infty}$ que mapea de la historia de las acciones previas (H_{t-1}) a su elección de acción en el período t , $s_{it}(H_{t-1}) \in S_i$. El conjunto de todas las estrategias puras para el jugador i es Σ_i

Definición

Definición

Un perfil de estrategias $s = (s_1, s_2)$ para los jugadores 1, 2 en un juego repetidos infinitamente es de **reversión a Nash** si la estrategia de cada jugador implica jugar un sendero Q hasta que algún jugador se desvía y jugar el EN de una etapa (x_1^*, x_2^*) en adelante

Teorema

Un perfil de estrategias con reversión a Nash que juega el sendero $X = \{x_{1t}, x_{2t}\}_{t=1}^{\infty}$ antes de cualquier desvío es un ENPSJ si y sólo si:

$$\hat{\pi}_i(x_{it}) + \frac{\delta}{1-\delta} \pi_i(x_1^*, x_2^*) \leq v_i(X, t)$$

$\forall t$ e $i = 1, 2$.

- ▶ Esta proposición establece que un perfil de estrategias X es un ENPSJ si da un valor descontado mayor a la mejor alternativa descontada de un juego en una etapa.

Extensión

Teorema

Sea un sendero de resultados X que puede sostenerse como un ENPSJ utilizando reversión a Nash cuando la tasa de descuento es δ . Entonces también puede sostenerse para cualquier $\delta' \geq \delta$.